Условия и решения
Осенняя интернет-олимпиада «2×2»
7 класс

Более 10 лет Творческая лаборатория «Дважды Два» проводит олимпиады школьников. В 2016 году 2 наших ученика стали членами сборной России по математике и представляют нашу страну на 57-й Международной математической олимпиаде.

В этой брошюре вы сможете найти вариант интернет-олимпиады, который проходил на Портале интернет-олимпиад «2х2». Вы можете использовать эти материалы для проведения олимпиадного тренинга у себя в классе или со своим ребенком. В брошюре содержатся условия задач для распечатки и выдачи детям, а также подробные решения всех задач. Также для каждой задачи приведены подробные критерии оценивания и методические рекомендации.

Школы, организованно проводящие наши интернет-олимпиады для своих школьников, получают от нас подробную статистику своих учеников и набор методических рекомендаций, которые используют в учебной работе. Если вы хотите организованно провести интернет-олимпиаду в своей школе, напишите нам по адресу: admin@olimpiada2x2.ru

Сайте проведения интернет-олимпиад: olimpiada2x2.ru

Адрес для связи: admin@olimpiada2x2.ru

Прохождение олимпиады

Олимпиада состоит из 2 туров по 6 задач в каждом. На решение каждого тура отводится 2 астрономических часа (120 минут). В каждой задаче указано наибольшее количество баллов, которое можно набрать за эту задачу.
Во второй части брошюры для каждой задачи приведены подробные решения, критерии оценивания и методические указания.

Желаем успехов!

Условия задач
I тур

Задача 1. «Осесимметричная» (5 баллов)

У Николя есть три одинаковых отрезка, из которых он сложил фигуру. Сколько осей симметрии может иметь фигура Николя?

Варианты ответов (нужно отметить какие варианты являются верными, а какие - нет):
0, 1, 2, 3, 6

Задача 2. «Натуральные делители» (4 балла)

Сколько существует четных натуральных чисел, у которых количество натуральных делителей (включая 1 и само число) равно 3?

Задача 3. «Торт» (6 баллов)

Никита ест торт в 2 раза быстрее любого из трех своих детей. Никита съедает торт за 120 минут. За сколько минут съест торт Никита вместе с тремя своими детьми?

Задача 4. «Признаки делимости» (6 баллов)

Найдите наименьшее натуральное число, нацело делящееся на 24, в записи которого есть только цифры 1 и 0.

Задача 5. «Камни» (7 баллов)

В некоторых клетках поля 2x11 лежат камни так, что если в какой-то клетке камня нет, то камень есть хотя бы в одной соседней с ней по стороне клетке. Какое наименьшее количество камней может быть на поле?

Задача 6. «Супержук» (8 баллов)

Супержук, новая разработка российских ученых, вылетел из Москвы в Челябинск (расстояние между городами 1769 км) со скоростью 6 км/ч. Через каждый километр пути жук удваивает свою скорость. Оцените время полета жука.

II тур

Задача 1. «Простая задача о простых числах» (6 баллов)

Сколько существует простых чисел меньших 10000 с суммой цифр равной 2?

Задача 2. «Сёстры и братья» (6 баллов)

У Антона несколько сестер, самая старшая из сестер Антона в 2 раза старше самой младшей из сестер Антона. Какое наименьшее количество сестер может быть у Антона, если произведение возрастов всех сестер Антона равно 7650.

Задача 3. «Часовая» (9 баллов)

Во сколько раз надо увеличить скорость минутной стрелки механических часов, не изменяя при этом скорость часовой стрелки, чтобы минутная стрелка стала обгонять часовую стрелку в 25 раз чаще.

Задача 4. «Разминка для мозга» (5 баллов)

В моей школе 500 людей. Фраза «ровно 100 из них ходят в школу каждый день» значит, что (нужно указать какие утверждения верны, а какие - ложны):

А) Каждый день 100 человек ходят в школу, а другие 400 не ходят
Б) Каждый день в школе находятся ровно 100 человек
В) Есть ровно 400 людей, которые если и ходят в школу, то не каждый день
Г) В школу каждый день приходят какие-то 100 людей
Д) Какие-то 400 людей каждый день не приходят в школу

Задача 5. «Треугольники с целыми сторонами» (6 баллов)

Геометр Василий задумался — сколько существует различных треугольников с целочисленными сторонами, длины которых не превышают 5? Василий нашел все такие треугольники. Выберите из списка верные утверждения.

Пояснение к задаче: Длина сторон треугольника могут принимать значения 1, 2, 3, 4 и 5.

Варианты ответов:

а) Таких треугольников больше 12

б) Среди таких треугольников ровно 5 равносторонних

в) Таких треугольников больше 21

г) Таких треугольников меньше 22

д) Среди этих треугольников больше 80% являются равнобедренными

е) Среди искомых треугольников не более трех разносторонних

Задача 6. «Перестановка цифр» (6 баллов)

Сколько существует двузначных чисел, которые увеличиваются не менее чем в 4 раза при перестановке цифр?

Решения задач и критерии оценивания
I тур

Задача 1. «Осесимметричная» (5 баллов)

У Николя есть три одинаковых отрезка, из которых он сложил фигуру. Сколько осей симметрии может иметь фигура Николя?

Варианты ответов (нужно отметить какие варианты являются верными, а какие - нет):
0, 1, 2, 3, 6

Правильный ответ:
0; 1; 2; 3; 6

Решение:
Покажем, что все варианты ответа верны.
а) Если Николя сложит три одинаковых отрезка в форме буквы И, то полученная фигура не будет иметь осей симметрии.
б) Если Николя сложит три одинаковых отрезка в форме буквы П, то полученная фигура будет иметь одну ось симметрии.
в) Если Николя сложит из трех отрезков букву Н, то полученная фигура будет иметь две оси симметрии.
г) Если Николя сложит из трех отрезков правильный треугольник, то полученная фигура будет иметь три оси симметрии.
д) Если Николя совместит все середины отрезков, и любые два отрезка будут располагаться под углом 60 градусов (фигура похожа на букву Ж), то у данной фигуры будет 6 осей симметрии.

Критерии оценивания:

За каждый из 5 пунктов ответа в этой задаче ученик мог получить +1 балл, -1 балл или 0 баллов. Если ученик не указывал ответ в пункте, он получал 0 баллов за данный пункт. Если ученик верно указывал ответ в пункте, он получал +1 балл за данный пункт. Если ученик неверно указывал ответ в пункте, он получал -1 балл за данный пункт. За всю задачу ученик мог получить от -5 до +5 баллов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему: «симметрия». Придумайте и разберите с детьми различные фигуры, имеющие оси симметрии, в каждом случае укажите все оси симметрии. Найдите фигуры, у которых бесконечное число осей симметрии.

Задача 2. «Натуральные делители» (4 балла)

Сколько существует четных натуральных чисел, у которых количество натуральных делителей (включая 1 и само число) равно 3?

Правильный ответ:
1

Решение:
Натуральное число имеет 3 натуральных делителя, только если оно является точным квадратом какого-нибудь простого числа. Действительно, если у числа хотя бы два различных простых делителя, то уже хотя бы 4 различных делителя: 1, два простых числа и само число. Поэтому у числа с тремя делителями есть ровно один простой делитель, поэтому оно является квадратом этого простого числа (у простого числа, возведенного в степень n, ровно n+1 делитель). Поскольку нас интересуют только четные числа, то простое число тоже должно быть четным, но единственное простое четное число равно 2. Поэтому единственное четное натуральное число с тремя натуральными делителями — это 4. Такое число единственно.

Критерии оценивания:

4 балла — ученик выбрал единственный правильный ответ.

0 баллов — ученик не указал ответ или выбрал неправильный ответ из предложенных вариантов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему «делимость» и все понятия связанные с этой темой: «четность»; «нечетность»; «делимость»; «делитель». Пройти или повторить вычисление количества делителей числа по его разложению на простые множители.

Задача 3. «Торт» (6 баллов)

Никита ест торт в 2 раза быстрее любого из трех своих детей. Никита съедает торт за 120 минут. За сколько минут съест торт Никита вместе с тремя своими детьми?

Правильный ответ:
Никите с тремя детьми понадобится 48 минут для поедания торта.

Решение:
Обозначим производительность («поедательную» способность) Никиты за $2x$, тогда у каждого из детей производительность равна x. То есть общая производительность равна $2x + x + x + x = 5x$, то есть производительность четверых людей в 5/2 раза выше производительности одного Никиты, то есть времени им потребуется в 5/2 раз меньше, то есть $120 : 5 \cdot 2 = 48$ минут.

Критерии оценивания:

6 баллов — ученик ввёл в поле для ответа число 48.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему «производительность».

Задача 4. «Признаки делимости» (6 баллов)

Найдите наименьшее натуральное число, нацело делящееся на 24, в записи которого есть только цифры 1 и 0.

Правильный ответ:
Наименьшее натуральное число, нацело делящееся на 24, в записи которого есть только цифры 1 и 0 равно 111000.

Решение:
Чтобы число делилось на 24, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 8 и на 3. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3, поэтому в искомом числе есть хотя бы три единицы. Чтобы число делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы его последние три цифры образовывали число, нацело делящееся на 8. Заметим, что число, делящееся на 24, четно, поэтому его последняя цифра четна, то есть равна 0. Переберем все возможные комбинации трех последних цифр удовлетворяющих перечисленным условиям: 000, 100, 010, 110. Заметим, только комбинация 000 нацело делится на 8, поэтому искомое число заканчивается на три нуля. Таким образом, наименьшее искомое число равно 111000.

Критерии оценивания:

6 баллов — ученик ввёл в поле для ответа число 111000.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

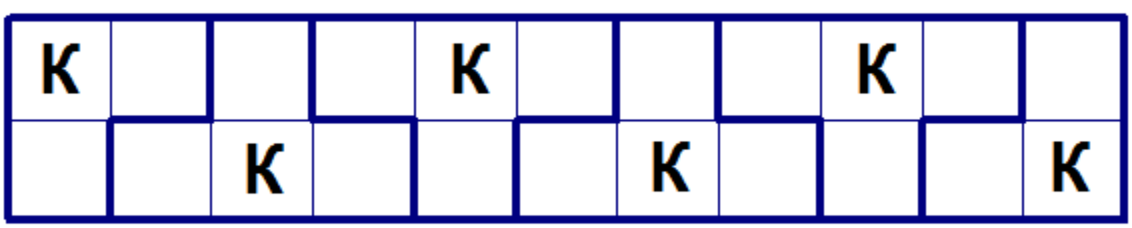
Не полный балл – повторить тему «делимость» и все признаки делимости. Разобрать задачи на применение признаков делимости.

Задача 5. «Камни» (7 баллов)

В некоторых клетках поля 2х11 лежат камни так, что если в какой-то клетке камня нет, то камень есть хотя бы в одной соседней с ней по стороне клетке. Какое наименьшее количество камней может быть на поле?

Правильный ответ:
Наименьшее количество камней на поле равно 6.

Решение:
Разобьем поле как показано на рисунке на 6 фигурок, в каждой фигурке есть хотя бы один камень, иначе у центральной клетки в фигуре не будет соседней клетки с камнем. Значит, камней на поле хотя бы 6. Приведем пример для шести камней, для этого положим в каждую из центральных клеток по одному камню.



Критерии оценивания:

7 баллов — ученик ввёл в поле для ответа число 6.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

Не полный балл – повторить темы: «конструктивы», «оценка плюс пример», «разрезания».

Задача 6. «Супержук» (8 баллов)

Супержук, новая разработка российских ученых, вылетел из Москвы в Челябинск (расстояние между городами 1769 км) со скоростью 6 км/ч. Через каждый километр пути жук удваивает свою скорость. Оцените время полета жука.

Правильный ответ:
Примерно 20 минут

Решение:
Докажем, что примерно за 20 минут жук долетит до Челябинска. Заметим, что за первые 10 минут, жук пролетит первый километр. Затем он увеличит скорость вдвое и пролетит второй километр за 5 минут, а третий за 2,5. До 20 минут останется 2,5 минуты. То есть на каждый следующий километр жук тратит ровно половину оставшегося времени до окончания 20 минут. Таким образом, он долетит до Челябинска чуть менее, чем за 20 минут.

Критерии оценивания:

8 баллов — ученик выбрал единственный правильный ответ.

0 баллов — ученик не указал ответ или выбрал неправильный ответ из предложенных вариантов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему: «движение». Можно начать проходить тему «последовательности и прогрессии» и поговорить о суммировании больших наборов чисел.

Всего за первый тур олимпиады ученик мог набрать максимум 36 баллов.

II тур

Задача 1. «Простая задача о простых числах» (6 баллов)

Сколько существует простых чисел меньших 10000 с суммой цифр равной 2?

Правильный ответ:
Таких чисел 3

Решение:
Найдем все числа меньшие 10000 с суммой цифр 2:
2, 20, 200, 2000, 11, 110, 1100, 101, 1001, 1010.
Среди этих чисел только три являются простыми: 2, 11 и 101. Значит, всего существует 3 простых числа меньших 10000 с суммой цифр 2.

Критерии оценивания:

6 баллов — ученик ввёл в поле для ответа число 3.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему «делимость» и понятия связанные с этой темой: «простое число»; «составное число»; «делимость»; «делитель». Поговорить о переборе при решении задач.

Задача 2. «Сёстры и братья» (6 баллов)

У Антона несколько сестер, самая старшая из сестер Антона в 2 раза старше самой младшей из сестер Антона. Какое наименьшее количество сестер может быть у Антона, если произведение возрастов всех сестер Антона равно 7650.

Правильный ответ:
Минимальное количество сестёр у Антона равно трём.

Решение:
Предположим, что у Антона только 2 сестры, тогда число 7650 : 2 = 3825 должно быть квадратом числа, равного возрасту младшей из сестер. Разложим число 3825 на простые множители: 3825 = 15 • 15 • 17. Это число не является квадратом, поэтому у Антона хотя бы 3 сестры. Покажем, что у Антона может быть 3 сестры. Пусть их возраста равны 15, 17 и 30, 30 = 15 • 2 и 15 • 17 • 30 = 7650. Значит, наименьшее количество сестер у Антона — 3.

Критерии оценивания:

6 баллов — ученик выбрал ответ 3 сестры.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему «разложение на простые множители». Рассказать о виде полных квадратов при разложении на простые множители.

Задача 3. «Часовая» (9 баллов)

Во сколько раз надо увеличить скорость минутной стрелки механических часов, не изменяя при этом скорость часовой стрелки, чтобы минутная стрелка стала обгонять часовую стрелку в 25 раз чаще.

Правильный ответ:
В 23 раза

Решение:
Часовая стрелка делает за сутки 2 оборота, а минутная 24 оборота. Значит, за сутки минутная стрелка обгонит часовую 24 - 2 = 22 раза. Если ускоренная минутная стрелка будет обгонять часовую в 25 раз чаще, то она обгонит ее за сутки 22 • 25 = 550 раз, значит, минутная стрелка сделает за сутки 552 оборота. А обыкновенная минутная стрелка делает только 24 оборота за сутки. 552 : 24 = 23. То есть минутная стрелка должна ускориться в 23 раза.

Критерии оценивания:

9 баллов — ученик выбрал единственный правильный ответ.

0 баллов — ученик не указал ответ или выбрал неправильный ответ из предложенных вариантов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить темы: «движение» и «часы», разобрать задачи на движение по кругу, в которых присутствуют ситуации обгона.

Задача 4. «Разминка для мозга» (5 баллов)

В моей школе 500 людей. Фраза «ровно 100 из них ходят в школу каждый день» значит, что (нужно указать какие утверждения верны, а какие - ложны):

А) Каждый день 100 человек ходят в школу, а другие 400 не ходят
Б) Каждый день в школе находятся ровно 100 человек
В) Есть ровно 400 людей, которые если и ходят в школу, то не каждый день
Г) В школу каждый день приходят какие-то 100 людей
Д) Какие-то 400 людей каждый день не приходят в школу

Правильный ответ:
Есть ровно 400 людей, которые если и ходят в школу, то не каждый день

Решение:
Фраза «ровно 100 из них ходят в школу каждый день» равносильна только фразе из пункта в) — «Есть ровно 400 людей, которые если и ходят в школу, то не каждый день.»

Критерии оценивания:

За каждый из 5 пунктов ответа в этой задаче ученик мог получить +1 балл, -1 балл или 0 баллов. Если ученик не указывал ответ в пункте, он получал 0 баллов за данный пункт. Если ученик верно указывал ответ в пункте, он получал +1 балл за данный пункт. Если ученик неверно указывал ответ в пункте, он получал -1 балл за данный пункт. За всю задачу ученик мог получить от -5 до +5 баллов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему «логика», разобрать различные высказывания и придумать им равносильные.

Задача 5. «Треугольники с целыми сторонами» (6 баллов)

Геометр Василий задумался — сколько существует различных треугольников с целочисленными сторонами, длины которых не превышают 5? Василий нашел все такие треугольники. Выберите из списка верные утверждения.

Пояснение к задаче: Длина сторон треугольника могут принимать значения 1, 2, 3, 4 и 5.

Варианты ответов:

а) Таких треугольников больше 12

б) Среди таких треугольников ровно 5 равносторонних

в) Таких треугольников больше 21

г) Таких треугольников меньше 22

д) Среди этих треугольников больше 80% являются равнобедренными

е) Среди искомых треугольников не более трех разносторонних

Правильный ответ:
Таких треугольников больше 12; Среди таких треугольников ровно 5 равносторонних; Таких треугольников больше 21; Среди этих треугольников больше 80% являются равнобедренными; Среди искомых треугольников не более трех разносторонних

Решение:
Не забывая о неравенстве треугольника, перечислим все возможные тройки длин сторон искомых треугольников.
5-5-5, 5-5-4, 5-5-3, 5-5-2, 5-5-1;
5-4-4, 5-4-3, 5-4-2;
5-3-3;
4-4-4, 4-4-3, 4-4-2, 4-4-1;
4-3-3, 4-3-2;
3-3-3, 3-3-2, 3-3-1;

3-2-2;
2-2-2, 2-2-1;
1-1-1.
Всего существует 22 различных треугольника, из которых 3 разносторонних и 19 равнобедренных, из которых 5 равносторонних. Ответы а), б), в), д) и е) являются верными.

Критерии оценивания:

За каждый из 6 пунктов ответа в этой задаче ученик мог получить +1 балл, -1 балл или 0 баллов. Если ученик не указывал ответ в пункте, он получал 0 баллов за данный пункт. Если ученик верно указывал ответ в пункте, он получал +1 балл за данный пункт. Если ученик неверно указывал ответ в пункте, он получал -1 балл за данный пункт. За всю задачу ученик мог получить от -6 до +6 баллов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить темы: «неравенство треугольника», «перебор».

Задача 6. «Перестановка цифр» (6 баллов)

Сколько существует двузначных чисел, которые увеличиваются не менее чем в 4 раза при перестановке цифр?

Правильный ответ:
Искомых двузначных чисел ровно 3 .

Решение:
Очевидно, что искать такие числа нужно в диапазоне от 11 до 24, так как если число больше 24, то при умножении на 4 оно становится трехзначным (число 10 перестаёт быть двузначным при перестановке цифр). Переберем все 14 «подозрительных» чисел.
Число 11 не изменяется при перестановке цифр.
12 • 4 = 48 > 21 — не подходит.
13 • 4 = 52 > 31 — не подходит.
14 • 4 = 56 > 41 — не подходит.
15 • 5 = 60 > 51 — не подходит.
16 • 6 = 64 > 61 — не подходит.
17 • 4 = 68 < 71 — подходит!
18 • 4 = 72 < 81 — подходит!
19 • 4 = 76 < 91 — подходит!
При перестановке цифр в числе 20 число перестает быть двузначным.
При перестановке цифр число 21 уменьшается.
При перестановке цифр число 22 не изменяется.
23 • 4 = 92 > 32 — не подходит.
24 • 4 = 96 > 42 — не подходит.
Как мы видим, только три двузначных числа увеличиваются не менее чем в 4 раза при перестановке цифр.

Критерии оценивания:

6 баллов — ученик ввёл в поле для ответа число 3.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему «перебор». Можно также повторить запись двузначного числа в виде 10•x+y, где x – число десятков, а y – число единиц.

Всего за второй тур олимпиады ученик мог набрать максимум 38 баллов, а за всю олимпиаду 74 балла.