Условия и решения
Осенняя интернет-олимпиада «2×2»
5 класс

Более 10 лет Творческая лаборатория «Дважды Два» проводит олимпиады школьников. В 2016 году 2 наших ученика стали членами сборной России по математике и представляют нашу страну на 57-й Международной математической олимпиаде.

В этой брошюре вы сможете найти вариант интернет-олимпиады, который проходил на Портале интернет-олимпиад «2x2». Вы можете использовать эти материалы для проведения олимпиадного тренинга у себя в классе или со своим ребенком. В брошюре содержатся условия задач для распечатки и выдачи детям, а также подробные решения всех задач. Также для каждой задачи приведены подробные критерии оценивания и методические рекомендации.

Школы, организованно проводящие наши интернет-олимпиады для своих школьников, получают от нас подробную статистику своих учеников и набор методических рекомендаций, которые используют в учебной работе. Если вы хотите организованно провести интернет-олимпиаду в своей школе, напишите нам по адресу: admin@olimpiada2x2.ru

Сайте проведения интернет-олимпиад: olimpiada2x2.ru

Адрес для связи: admin@olimpiada2x2.ru

Прохождение олимпиады

Олимпиада состоит из 2 туров по 6 задач в каждом. На решение каждого тура отводится 2 астрономических часа (120 минут). В каждой задаче указано наибольшее количество баллов, которое можно набрать за эту задачу.
Во второй части брошюры для каждой задачи приведены подробные решения, критерии оценивания и методические указания.

Желаем успехов!

Условия задач
I тур

Задача 1. «Про сумму чисел» (7 баллов)

Сумма 2015 натуральных чисел равна 2017. Чему может быть равно их произведение?

Варианты ответов: 1, 2, 3, 4, 2015, 2016, 2017

Задача 2. «Таблица умножения» (5 баллов)

Какое из этих чисел чаще других встречается в таблице умножения для однозначных чисел?

Варианты ответов: 49, 81, 48, 24, 35

Задача 3. «Игральные кубики» (7 баллов)

На одном игральном кубике количество точек на гранях принимает все значения от 1 до 6. При этом общее число точек на любых двух противоположных гранях равно 7. Саша склеила столбик из трех таких кубиков и нашла общее число точек на всех видимых гранях полученного столбика (столбик из 3 кубиков можно поднимать со стола и переворачивать, точки на грани не видны, только если грань приклеена к другой грани). Какое наибольшее число она могла получить?

Пояснение к задаче: В ответ введите наибольше из возможных чисел, которые могла получить Саша в результате подсчета всех видимых точек столбца из 3 кубиков.

Задача 4. «Ребус» (9 баллов)

Коля написал ребус: М + А + Й = АЙ, где одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры. Сколько различных решений имеет этот ребус?

Задача 5. «Бумажный квадрат» (5 баллов)

Саша свернула пополам квадратный кусок бумаги и получила прямоугольник, потом она свернула полученный прямоугольник снова пополам и получила квадрат. Теперь Саша разрезала полученный квадрат резаком по прямой на две части. На сколько частей при этом мог распасться исходный бумажный квадрат?

Варианты ответа: 1, 2, 3, 4, 5

Задача 6. «Часовая» (9 баллов)

Во сколько раз надо увеличить скорость минутной стрелки механических часов, не изменяя при этом скорость часовой стрелки, чтобы минутная стрелка стала обгонять часовую стрелку в 25 раз чаще.

Правильный ответ:
в 23 раза

II тур

Задача 1. «Процентная» (5 баллов)

Зарплата Николая за прошедший год дважды вырастала на 40%, а цены на продукты за прошедший год упали на 20%. На сколько процентов больше продуктов теперь сможет купить Николай по сравнению с прошлым годом, если всю зарплату он тратит на продукты?

Задача 2. «Телефонный диск» (6 баллов)

Никита расставил по кругу 6 натуральных чисел, а Саша заметила, что каждое число в круге равно либо сумме, либо разности двух своих соседей. Какое количество различных натуральных чисел мог использовать Никита в круге?

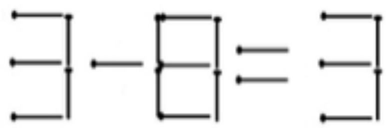
Варианты ответов: 1, 2, 3, 4, 5, 6

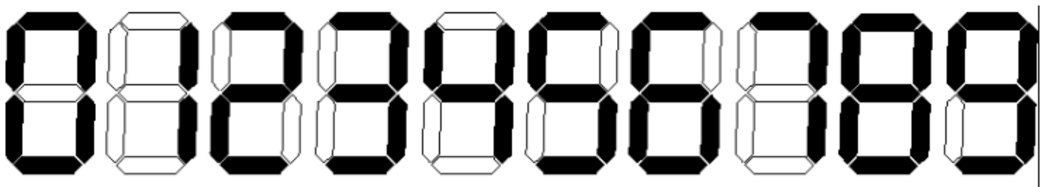
Задача 3. «Ребус» (4 балла)

Малыш написал на доске верный пример на вычитание, а потом пришел Карлсон и стер некоторые цифры, нарисовав вместо них звездочки. На доске появилась запись: *3* - *2 = 905.
Восстановите пример Малыша, в ответ запишите уменьшаемое и вычитаемое.

Пояснение к задаче: Под звездочками могут скрываться различные цифры.

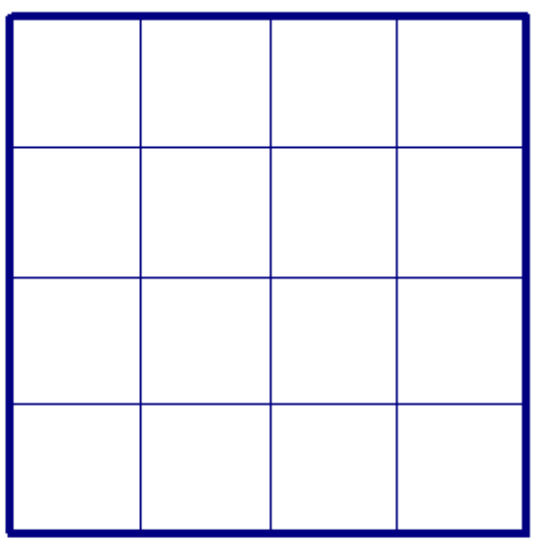
Задача 4. «Спички» (5 баллов)





Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным. В ответ запишите верное равенство. Для примера на картинке показано написание всех цифр.

Задача 5. «Разрезалка» (6 баллов)



У Миши есть клетчатый квадрат 4x4. Миша хочет его разрезать на несколько попарно различных прямоугольников по линиям сетки. На какое наибольшее количество различных прямоугольников можно разрезать квадрат Миши по линиям сетки?

Пояснение к задаче: Прямоугольники являются различными, если они не совпадают при наложении. Резать можно только по линиям сетки, то есть только вдоль границ квадратиков 1x1.

Задача 6. «Комбинаторная геометрия» (9 баллов)

На плоскости отметили 15 точек и соединили каждую пару точек отрезком. Какое наибольшее количество из этих отрезков может пересекать прямая, которая не проходит ни через одну из отмеченных точек?

Пояснение к задаче: В ответ введите наибольшее число отрезков.

Условия задач и критерии оценивания
I тур

Задача 1. «Про сумму чисел» (7 баллов)

Сумма 2015 натуральных чисел равна 2017. Чему может быть равно их произведение?

Варианты ответов: 1, 2, 3, 4, 2015, 2016, 2017

Правильный ответ:
3; 4

Решение:
Поскольку все числа натуральные, то сумма 2015 таких чисел не меньше 2015, но их сумма равна 2017. То есть мы должны взять набор единиц и еще 2017 - 2015 = 2 единицы мы должны распределить между числами в нашем наборе. Значит, среди 2015 чисел либо 2014 единиц и 1 тройка, либо 2013 единиц и 2 двойки. В первом случае их произведение равно 3, а во втором случае — 4.

Критерии оценивания:

За каждый из 7 пунктов ответа в этой задаче ученик мог получить +1 балл, -1 балл или 0 баллов. Если ученик не указывал ответ в пункте, он получал 0 баллов за данный пункт. Если ученик верно указывал ответ в пункте, он получал +1 балл за данный пункт. Если ученик неверно указывал ответ в пункте, он получал -1 балл за данный пункт. За всю задачу ученик мог получить от -7 до +7 баллов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить темы: «натуральные числа» и «конструктивы». Разберите с детьми различные числовые конструкции, связанные со всеми арифметическими действиями.

Задача 2. «Таблица умножения» (5 баллов)

Какое из этих чисел чаще других встречается в таблице умножения для однозначных чисел?

Варианты ответов: 49, 81, 48, 24, 35

Правильный ответ:
24

Решение:
Числа 49, 81 могут быть представлены единственным образом в виде произведения двух однозначных чисел: 49 = 7 • 7 и 81 = 9 • 9. Варианты ответов а) и б) являются неверными, так как числа 48 и 35 могут быть представлены двумя разными способами в виде произведения двух однозначных чисел: 48 = 6 • 8 = 8 • 6 и 35 = 5 • 7 = 7 • 5, при этом число 24 может быть представлено 4 различными способами: 24 = 4 • 6 = 6 • 4 = 3 • 8 = 8 • 3. Правильный вариант ответа - г).

24 может быть представлено 4 различными способами: 24 = 4 • 6 = 6 • 4 = 3 • 8 = 8 • 3. Правильный вариант ответа - г).

Критерии оценивания:

5 баллов — ученик выбрал единственный правильный ответ.

0 баллов — ученик не указал ответ или выбрал неправильный ответ из предложенных вариантов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить таблицу умножения, поговорить о многозначности в задачах.

Задача 3. «Игральные кубики» (7 баллов)

На одном игральном кубике количество точек на гранях принимает все значения от 1 до 6. При этом общее число точек на любых двух противоположных гранях равно 7. Саша склеила столбик из трех таких кубиков и нашла общее число точек на всех видимых гранях полученного столбика (столбик из 3 кубиков можно поднимать со стола и переворачивать, точки на грани не видны, только если грань приклеена к другой грани). Какое наибольшее число она могла получить?

Пояснение к задаче: В ответ введите наибольше из возможных чисел, которые могла получить Саша в результате подсчета всех видимых точек столбца из 3 кубиков.

Правильный ответ:
Наибольшее число, которое могла получить Саша равно 54

Решение:
Сумма всех точек на одном игральном кубике равна 21, значит на трех кубика сумма точек равна 63. Мы «потеряли» 4 грани, две из которых являются противоположными гранями среднего кубика в столбце, то есть на этих гранях вместе 7 точек. Еще мы «потеряли» по одной грани у крайних кубиков, на каждом из которых еще хотя бы по 1 точке. Вместе мы потеряли, как минимум, 7 + 1 + 1 = 9 точек, поэтому наибольшее число, которое могла получить Саша, равно 63 - 9 = 54.

Критерии оценивания:

7 баллов — ученик ввёл в поле для ответа число 54.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

Не полный балл – разобрать, что такое «игральный кубик», как нанесены точки на грани и разобрать примеры на суммы чисел при бросании нескольких кубиков, при склейке разных конструкций из игральных кубиков.

Задача 4. «Ребус» (9 баллов)

Коля написал ребус: М + А + Й = АЙ, где одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры. Сколько различных решений имеет этот ребус?

Правильный ответ:
Этот ребус имеет 8 решений

Решение:
Поскольку в левой части стоит сумма трех различных однозначных чисел, то эта сумма не превышает числа 9 + 8 + 7 = 24, то есть А скрывает цифру 1 или 2 (буква А не может скрывать нуль, так как число АЙ не может начинаться с цифры 0, как и любое другое число).
Пусть А = 2, тогда максимальная сумма в левой части равенства равна 9 + 2 + 8 =19 (буквы М и Й скрывают разные цифры), тогда А = 1 — противоречие, этот случай невозможен.
Значит остается единственный случай — А = 1. Ребус преобразуется: М + 1 + Й = 1Й. Теперь вычтем из обеих частей исходного равенства Й, получим ребус: М + 1 = 10, поэтому М = 9, а Й — любая цифра кроме 1 и 9, так как 1 и 9 мы уже «использовали» для А и М соответственно. Поэтому этот ребус имеет 8 решений (8 вариантов для Й).

Критерии оценивания:

9 баллов — ученик ввёл в поле для ответа число 8.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

Не полный балл – повторить счет в пределах ста. Составить различные примеры с буквами вместо цифр и разобрать, какие могут получаться ответы. Обратить внимание, что бывают ребусы с буквами, у которых несколько решений, а бывают такие, у которых нет решений.

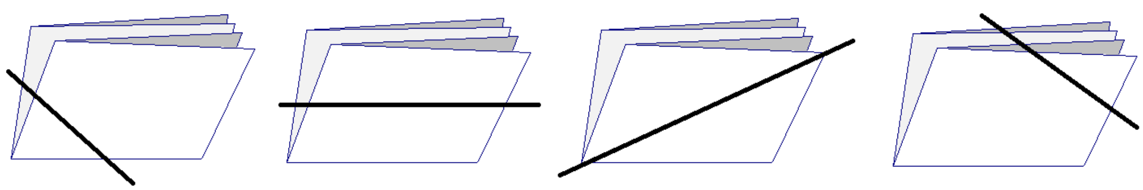
Задача 5. «Бумажный квадрат» (5 баллов)

Саша свернула пополам квадратный кусок бумаги и получила прямоугольник, потом она свернула полученный прямоугольник снова пополам и получила квадрат. Теперь Саша разрезала полученный квадрат резаком по прямой на две части. На сколько частей при этом мог распасться исходный бумажный квадрат?

Варианты ответа: 1, 2, 3, 4, 5

Правильный ответ:
2; 3; 4; 5

Решение:
На одну часть квадрат распасться не мог, так как мы разрезали сверток на 2 части, значит, и квадрат был разрезан хотя бы на 2 части. Пункт 1 неверен. Все остальные пункты верны. Примеры разрезов приведены на рисунке.



Критерии оценивания:

За каждый из 5 пунктов ответа в этой задаче ученик мог получить +1 балл, -1 балл или 0 баллов. Если ученик не указывал ответ в пункте, он получал 0 баллов за данный пункт. Если ученик верно указывал ответ в пункте, он получал +1 балл за данный пункт. Если ученик неверно указывал ответ в пункте, он получал -1 балл за данный пункт. За всю задачу ученик мог получить от -5 до +5 баллов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему «разрезания». Провести с детьми практическую работу по указанной теме.

Задача 6. «Часовая» (9 баллов)

Во сколько раз надо увеличить скорость минутной стрелки механических часов, не изменяя при этом скорость часовой стрелки, чтобы минутная стрелка стала обгонять часовую стрелку в 25 раз чаще.

Правильный ответ:
в 23 раза

Решение:
Часовая стрелка делает за сутки 2 оборота, а минутная 24 оборота. Значит, за сутки минутная стрелка обгонит часовую 24 - 2 = 22 раза. Если ускоренная минутная стрелка будет обгонять часовую в 25 раз чаще, то она обгонит ее за сутки 22 • 25 = 550 раз, значит, минутная стрелка сделает за сутки 552 оборота. А обыкновенная минутная стрелка делает только 24 оборота за сутки. 552 : 24 = 23. То есть минутная стрелка должна ускориться в 23 раза.

Критерии оценивания:

9 баллов — ученик выбрал единственный правильный ответ.

0 баллов — ученик не указал ответ или выбрал неправильный ответ из предложенных вариантов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить темы: «движение» и «часы», разобрать задачи на движение по кругу, в которых присутствуют ситуации обгона.

Всего за первый тур олимпиады ученик мог набрать максимум 42 балла.

II тур

Задача 1. «Процентная» (5 баллов)

Зарплата Николая за прошедший год дважды вырастала на 40%, а цены на продукты за прошедший год упали на 20%. На сколько процентов больше продуктов теперь сможет купить Николай по сравнению с прошлым годом, если всю зарплату он тратит на продукты?

Правильный ответ:
Николай сможет купить на 145 % больше.

Решение:
За год зарплата Николая увеличилась в 1,4 • 1,4 = 1,96 раза, при этом цены на продукты упали на 20% и составили 0,8 от первоначальной цены. То есть Николай сможет купить в 1,96 : 0,8 = 2,45 раза больше продуктов, то есть на (2,45 - 1) • 100% = 145% больше.

Критерии оценивания:

5 баллов — ученик ввёл в поле для ответа число 145.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему «проценты и части».

Задача 2. «Телефонный диск» (6 баллов)

Никита расставил по кругу 6 натуральных чисел, а Саша заметила, что каждое число в круге равно либо сумме, либо разности двух своих соседей. Какое количество различных натуральных чисел мог использовать Никита в круге?

Варианты ответов: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Правильный ответ:
2; 3; 4

Решение:
Понятно, что одно число Никита использовать не мог, так как он использовал натуральные числа и расставлять одни нули по кругу мы не можем, а других решений уравнений X + X = X или X - X = X нет. Ответ а) неверен.
Никита мог использовать только два различных числа, например: -3-3-6-3-3-6. Тогда любое число 6 равно сумме своих соседей, а любое число 3 равно разности своих соседей. Пункт б) верен.
Также Никита мог использовать 3 различных числа: -2-5-7-2-5-7. Число 7 в этой расстановке равно сумме своих соседей, а числа 2 и 5 равны разности своих соседей. Пункт в) верен.
Также Никита мог использовать 4 различных числа: -2-5-7-2-5-3. Число 2 = 5 - 3, 5 = 7 - 2, 7 = 2 + 5, 2 = 7 - 5, 5 = 2 + 3, 3 = 5 - 2. Пункт г) верен.
Докажем, что Никита не мог использовать больше 4 различных чисел. Возьмем наибольшее или одно из наибольших чисел в круге - x. Пусть его соседи это числа z и y: _zxy_. Тогда z и y равны разности своих соседей, так как числа натуральные и их сосед x является наибольшим. Поэтому рядом с z стоит y, а рядом с y стоит z: yzxyz. То есть среди этих пяти чисел не более 3 различных (z и y могут еще и совпадать), остается шестое число, поэтому всего в круге находится не более 4 различных чисел, пункты д) и е) неверны.

Критерии оценивания:

За каждый из 6 пунктов ответа в этой задаче ученик мог получить +1 балл, -1 балл или 0 баллов. Если ученик не указывал ответ в пункте, он получал 0 баллов за данный пункт. Если ученик верно указывал ответ в пункте, он получал +1 балл за данный пункт. Если ученик неверно указывал ответ в пункте, он получал -1 балл за данный пункт. За всю задачу ученик мог получить от -6 до +6 баллов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить тему «конструктивы». Можно разобрать задачи на расстановки чисел в ряд, по кругу при различных условиях. Поговорить о записях чисел буквами.

Задача 3. «Ребус» (4 балла)

Малыш написал на доске верный пример на вычитание, а потом пришел Карлсон и стер некоторые цифры, нарисовав вместо них звездочки. На доске появилась запись: *3* - *2 = 905.
Восстановите пример Малыша, в ответ запишите уменьшаемое и вычитаемое.

Пояснение к задаче: Под звездочками могут скрываться различные цифры.

Правильный ответ:
937 - 32 = 905

Решение:
Последняя цифр уменьшаемого равна 7, так как она равна сумме последних цифр вычитаемого и разности (если эта сумма однозначна). Значит, мы восстановили одну из пропущенных цифр: *37 - *2 = 905.
Также мы можем найти первую цифру уменьшаемого, она равна 9, так как уменьшаемое не меньше разности. Первая цифра разности равна 9, мы восстановили уже две цифры: 937 - *2 = 905. Понятно, что первая цифра вычитаемого равна 3. Мы полностью восстановили пример: 937 - 32 = 905.

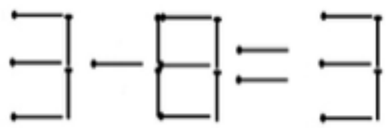
Критерии оценивания:

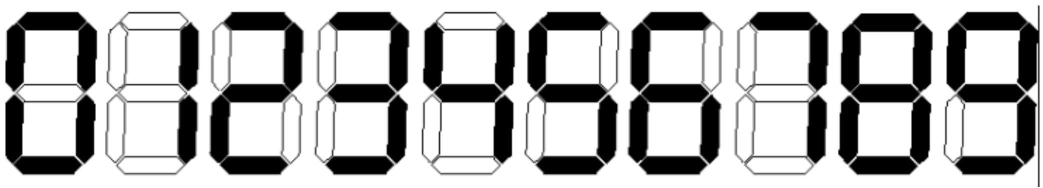
При оценивании данного задания отдельно оценивались два ответа: уменьшаемое и вычитаемое. За верно указанное уменьшаемое ученик получал 3 балла, а за верно указанное вычитаемое — 1 балл. Всего за задачу ученик мог получить от 0 до 4 баллов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить счет в пределах тысячи, повторить счет столбиком. Составить различные примеры со звездочками вместо цифр и разобрать, какие могут получаться ответы. Обратить внимание, что бывают ребусы со звездочками, у которых несколько решений, а бывают такие, у которых нет решений.

Задача 4. «Спички» (5 баллов)





Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным. В ответ запишите верное равенство. Для примера на картинке показано написание всех цифр.

Правильный ответ:
9 - 6 = 3

Решение:
Нужно переложить одну спичку из вычитаемого 8, сделав его 6, в уменьшаемое 3, сделав его 9. Верный пример: 9 - 6 = 3.

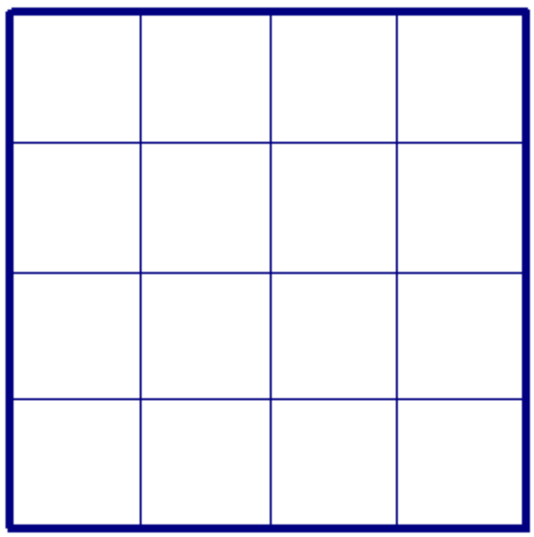
Критерии оценивания:

При оценивании данного задания отдельно оценивались три ответа: уменьшаемое, вычитаемое и разность. За верно указанное уменьшаемое или вычитаемое ученик получал по 2 балла, а за верно указанную разность — 1 балл. Всего за задачу ученик мог получить от 0 до 5 баллов.

Методические указания:

Не полный балл – повторить счет в натуральных числах, на спичках с детьми разобрать разные задачи на дополнение, переложение и удаление спичек.

Задача 5. «Разрезалка» (6 баллов)



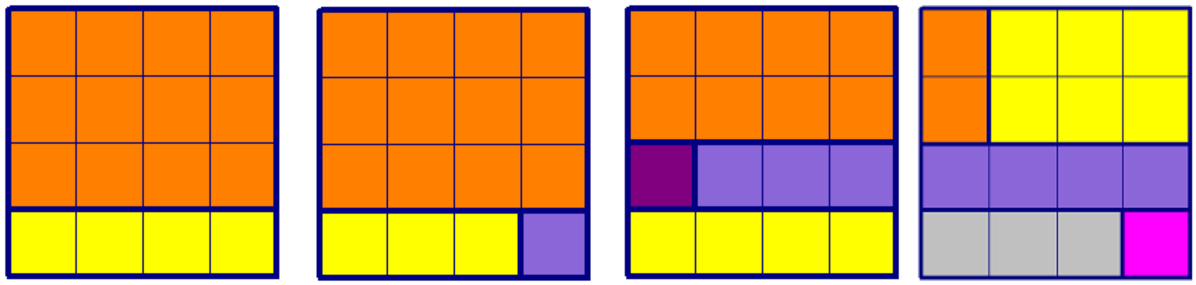
У Миши есть клетчатый квадрат 4х4. Миша хочет его разрезать на несколько попарно различных прямоугольников по линиям сетки. На какое наибольшее количество различных прямоугольников можно разрезать квадрат Миши по линиям сетки?

Пояснение к задаче: Прямоугольники являются различными, если они не совпадают при наложении. Резать можно только по линиям сетки, то есть только вдоль границ квадратиков 1х1.

Правильный ответ:
Квадрат 4х4 можно разрезать не более чем на 5 различных прямоугольников.

Решение:
Существует всего по одному различному прямоугольнику площади 1, 2 и 3 клетки, это квадрат 1х1, прямоугольник-домино 1х2 и прямоугольник-тримино 1х3. Также существует ровно 2 различных прямоугольника площади 4 клетки — это квадрат 2х2 и прямоугольник 1х4. Также существует ровно один прямоугольник площади 5 клеток, его стороны равны 1 и 5. Заметим, что 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 = 19 > 16, то есть мы не сможем разрезать квадрат 4х4 даже на 6 самых маленьких по площади разных прямоугольников, поэтому можно

разрезать не более чем на 5 различных прямоугольников. Приведем соответствующий пример.



Критерии оценивания:

6 баллов — ученик ввёл в поле для ответа число 5.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

Не полный балл – повторить, что такое «прямоугольник». Также можно выполнить различные разрезания квадрата на прямоугольники, чтобы дети получили практический опыт в задачах на разрезания.

Задача 6. «Комбинаторная геометрия» (9 баллов)

На плоскости отметили 15 точек и соединили каждую пару точек отрезком. Какое наибольшее количество из этих отрезков может пересекать прямая, которая не проходит ни через одну из отмеченных точек?

Пояснение к задаче: В ответ введите наибольшее число отрезков.

Правильный ответ:
Наибольшее количество отрезков, которые может пересекать прямая, равно 56

Решение:
Любая прямая делит все точки на две группы, пусть, например, с одной стороны прямой лежит 4 точки, а с другой оставшиеся 11 точек. В этом случае прямая будет пересекать все отрезки, концы которых лежат по разные стороны от проведенной прямой, то есть в данном примере прямая будет пересекать 4 • 11 = 44 отрезка. Тогда прямая будет пересекать наибольшее количество отрезков, когда с одной стороны лежит 7 точек, а с другой 8, в этом случае прямая пересечет 7 • 8 = 56 отрезков — это наибольшее количество отрезков, которое пересечет искомая прямая.

Критерии оценивания:

9 баллов — ученик ввёл в поле для ответа число 56.

0 баллов — все остальные случаи ответа.

Методические указания:

Не полный балл – повторить элементы геометрии, которые известны детям. Провести практическую работу по теме «точки, прямые, отрезки». Повторить или пройти тему «начала комбинаторики», разобрать «правило умножения» и «правило сложения» при решении комбинаторных задач.

Всего за второй тур олимпиады ученик мог набрать максимум 35 баллов, а за всю олимпиаду 77 баллов.